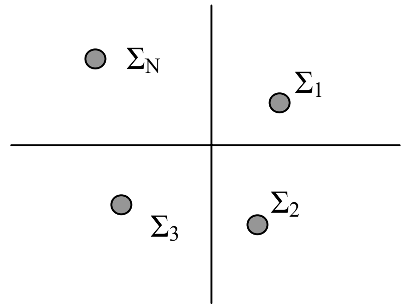
Γ. Βουγιατζής

Σύντομες σημειώσεις αναλυτικής Μηχανικής

1. Μηχανικά συστήματα και εξισώσεις κίνησης

Ένα μηχανικό σύστημα αποτελείται από *N* υλικά σημεία[1] Σ_i με μάζα m_i. Κάθε σημείο θα περιγράφεται στον φυσικό – καρτεσιανό τρισδιάστατο χώρο με μια τριάδα μεταβλητών

$\Sigma_i \quad \leftrightarrow \quad (x_i, y_i, z_i)$



Άρα για τα N σημεία του συστήματος θα έχουμε 3N παραμέτρους για την περιγραφή της φυσικής θέσης του συστήματος στο χώρο.

Αν στο σύστημα έχουμε *k* ολόνομους δεσμούς, δηλαδή σχέσεις της μορφής

$$F_i = F_i(x_j, y_j, z_j, t) = 0, \quad (j = 1,.., N) \quad i = 1,..., k \tag{1}$$

τότε οι καρτεσιανές συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από

$$n = 3N - k \tag{2}$$

συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες αυτές μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα αρκεί να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, συμβολίζονται ως $q_1, q_2, ..., q_n$ και ονομάζονται **γενικευμένες συντεταγμένες**. Οι αντίστοιχες παράγωγες ως προς το χρόνο ονομάζονται γενικευμένες ταχύτητες. Ο αριθμός <u>*n* είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος</u>. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του συστήματος θα βρίσκονται μέσα από τον ορισμό των γενικευμένων συντεταγμένων και από σχέσεις της μορφής

$$x_i = x_i(q_j, t), \quad y_i = y_i(q_j, t), \quad z_i = z_i(q_j, t), \quad i = 1,.., N \quad j = 1,.., n \tag{3}$$

Αν οι ολόνομοι δεσμοί δεν παράγουν-καταναλώνουν δυνατό έργο το σύστημα ονομάζεται **καθαρά μηχανικό** και μπορεί να περιγραφεί από την συνάρτηση Lagrange και τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις

$$L = T - V \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1,.., n \tag{5}$$

Το *T* εκφράζει την συνολική **κινητική ενέργεια** του συστήματος, που με βάση τις σχέσεις (3) γράφεται

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = T(q_j, \dot{q}_j, t) \tag{6}$$

Η **δυναμική ενέργεια** είναι το "άθροισμα" των δυναμικών ενεργειών για όλα τα σημεία συμπεριλαμβανομένης και της ενέργειας άλλων στοιχείων του συστήματος (πχ των ελατηρίων). Θα θεωρήσουμε την περιπτώσεις όπου το δυναμικό εξαρτάται μόνο από τις θέσεις[2] και ενδεχομένως από τον χρόνο

[1] Τα υλικά σημεία μπορεί να «σχηματίζουν» και ένα στερεό σώμα

[2] Αν το δυναμικό εξαρτάται από τις ταχύτητες τότε θα πρέπει να είναι ένα **γενικευμένο δυναμικό** συμβατό με τις εξισώσεις Lagrange.

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i(x_i, y_i, z_i) + V_{mc} = V(q_j, t), \quad j = 1,..n \tag{7}$$

Η εξέλιξη, λοιπόν, του *καθαρά μηχανικού* συστήματος, θα περιγράφεται από τις *n* διαφορικές εξισώσεις (5), η λύση των οποίων (αναλυτική ή αριθμητική) θα μας δώσει τις γενικευμένες συντεταγμένες σαν συναρτήσεις του χρόνου $q_j = q_j(t; q_{i0}, \dot{q}_{i0})$, όπου $q_{i0}, \dot{q}_{i0}$ οι αρχικές συνθήκες. *Στη συνέχεια, μέσω των σχέσεων (3) παίρνουμε την εξέλιξη της θέσης των σημείων του συστήματος μέσα στο φυσικό χώρο.*

<u>Ολοκληρώματα της κίνησης</u>

- Ύπαρξη **αγνοήσιμων συντεταγμένων** : Αν υπάρχει αγνοήσιμη γενικευμένη συντεταγμένη q_j, τότε

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(q_i, \dot{q}_i) = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{8}$$

- **Γενικευμένες ορμές**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_1,..,q_n,\dot{q}_1,..,\dot{q}_n) \tag{9}$$

Για δυναμικά $V = V(q_j)$ και με την παρουσία <u>μόνο</u> σκληρόνομων δεσμών (δηλαδή οι (1) δεν εξαρτώνται από το χρόνο) θα είναι

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = T + V = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{10}$$

δηλαδή έχουμε το ολοκλήρωμα της ενέργειας. Γενικότερα, αν $\partial L / \partial t = 0$ θα έχουμε το ολοκλήρωμα

$$E = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L \tag{11}$$

<u>Συνάρτηση Hamilton</u>

Η συνάρτηση Hamilton προκύπτει μέσα από τον μετασχηματισμό Legendre

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \dot{q}_i(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n) \\ H &= \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_1,..,q_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad H = H(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n) \tag{12}$$

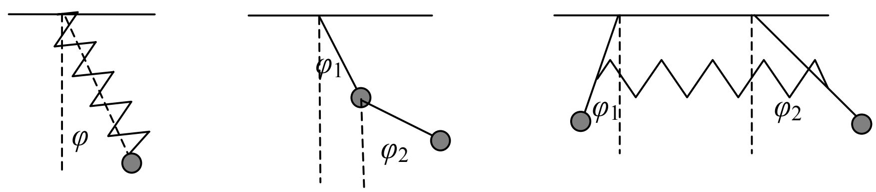
- Εξισώσεις Hamilton – Κανονικές Εξισώσεις ($2n$, $1^{ης}$ τάξης ΔΕ)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,...,n) \tag{13}$$

Οι (5) και (13) είναι ισοδύναμες θεωρητικά. Σε μια αριθμητική επίλυση όμως μπορεί η μια από τις δύο μορφές να συμπεριφέρεται πιο ομαλά. Αυτό εξάλλου ισχύει και με την επιλογή γενικευμένων συντεταγμένων.

Στην περίπτωση που στο σύστημα υπάρχουν δεσμοί που παράγουν-καταναλώνουν έργο (πχ τριβή), θα πρέπει, λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις του Νεύτωνα, να εισάγουμε κατάλληλες διορθώσεις στις εξισώσεις (5) ή (13).

Τα μηχανικά συστήματα λίγων βαθμών ελευθερίας παρουσιάζουν πλούσια δυναμική συμπεριφορά. Χαοτική συμπεριφορά μπορεί να εμφανιστεί από τους δύο κιόλας βαθμούς ελευθερίας ή και στον έναν βαθμό ελευθερίας για μη αυτόνομα συστήματα. Δύο κλασικά απλά μηχανικά συστήματα με χαοτική συμπεριφορά είναι το εκκρεμές με ελατήριο, το διπλό εκκρεμές και τα συζευγμένα εκκρεμή με ελατήριο[3]



Παράδειγμα. Το ελατήριο με εκκρεμές (πάνω σχήμα – αριστερά)

Το σύστημα αποτελείται από ένα υλικό σημείο που κινείται στο επίπεδο *x-y*. Το ελατήριο δεν εισάγει κάποιον ολόνομο δεσμό στην κίνηση, το σύστημα μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε θέση του επιπέδου και είναι δύο βαθμών ελευθερίας. Αν και μπορούμε να θεωρήσουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις καρτεσιανές x και y, θα πάρουμε τις φ και r (απόσταση του υλικού σημείου από το σημείο στήριξης). Οι καρτεσιανές συντεταγμένες θα δίνονται από τις σχέσεις

$$x = r\sin\varphi, \quad y = -r\cos\varphi \tag{14}$$

Προκύπτουν έτσι οι παρακάτω ποσότητες

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$V = V_g + V_s = -mgr\cos\varphi + \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$$

όπου l_0 το φυσικό μήκος του ελατηρίου και *k* η σταθερά του. Η συνάρτηση Lagrange θα είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 \tag{15}$$

και οι **εξισώσεις του δυναμικού συστήματος** θα προκύψουν από τις (5) (για $q_1 \equiv r, \quad q_2 \equiv \varphi$)

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m}(r - l_0) + g\cos\varphi \\ \ddot{\varphi} &= \frac{1}{r}(-2\dot{r}\dot{\varphi} - g\sin\varphi) \end{aligned} \tag{16}$$

[3] Σε κάθε περίπτωση θεωρούμε τα ελατήρια γραμμικά με δυναμικό V=$k\,\Delta x^2/2$