ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ
ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

(*Μεθοδολογία- Παραδείγματα*)

Κλεομένης Γ. Τσιγάνης
Λέκτορας ΑΠΘ

Πρόχειρες διδακτικές σημειώσεις για το μάθημα

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

Θεσσαλονίκη, Ακ. Έτος: 2009-10

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν διδακτικό βοήθημα για το μάθημα *Θεωρητική Μηχανική ΙΙ* του 5ου εξαμήνου του Τμήματος Φυσικής του ΑΠΘ. Αποτελούνται από μια σύνοψη της βασικής θεωρίας και μεθοδολογίας της Αναλυτικής Μηχανικής (κατά Lagrange και Hamilton) και από μια σειρά λυμένων προβλημάτων, τα οποία χωρίζονται σε τρία κεφάλαια: κίνηση υλικού σημείου, μικρές ταλαντώσεις και κίνηση στερεού σώματος.

Αρκετά από τα παραδείγματα που ακολουθούν (αλλά όχι όλα) μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο του Μ. Μιχαλοδημητράκη "*Ασκήσεις Αναλυτικής Μηχανικής*" (Υπ. Δημ/των ΑΠΘ) που επί πολλά χρόνια μοιράζονταν στους φοιτητές του Τμ. Φυσικής ως βοηθητικό σύγγραμμα για το εν λόγω μάθημα και αποτέλεσε τη βάση αυτών των σημειώσεων. Το νέο στοιχείο της παρούσας προσπάθειας είναι ότι τα προβλήματα αναλύονται πιο διεξοδικά και έχουν εμπλουτιστεί με επιπλέον ερωτήματα, σχετικά με (α) την εύρεση των ολοκληρωμάτων της κίνησης, (β) την εύρεση και το χαρακτηρισμό της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας και (γ) την εύρεση των εξισώσεων του Hamilton, θέματα τα οποία δεν καλύπτονταν επαρκώς στο βιβλίο του Μ. Μιχαλοδημητράκη.

Η επιλογή των ασκήσεων έγινε με στόχο να καλυφθούν κατά το δυνατόν όλες οι βασικές κατηγορίες προβλημάτων αναλυτικής μηχανικής, στα πλαίσια της ύλης του μαθήματος Θεωρητική Μηχανική ΙΙ του Τμ. Φυσικής.

Καλή μελέτη!

Κλεομένης Γ. Τσιγάνης
Θεσσαλονίκη, 2009

0. Βασικές Έννοιες Αναλυτικής Μηχανικής

Οι βαθμοί ελευθερίας ενός μηχανικού συστήματος είναι το πλήθος των ανεξάρτητων συντεταγμένων που χρειάζονται για να περιγραφεί η κίνησή του. Ένα σύστημα N υλικών σημείων που υπόκειται σε k ανεξάρτητους, ολόνομους δεσμούς έχει $n=3N-k$ β.ε., αν η κίνηση λαμβάνει χώρα στον 3-διάστατο χώρο (αντίστοιχα, $n=2N-k$ β.ε στον 2-διάστατο χώρο). Ένα σύστημα N στερεών σωμάτων έχει $n=6N-k$ β.ε στον 3-διάστατο χώρο (3 μεταφορικούς και 3 περιστροφικούς β.ε. για κάθε υλικό σημείο) και $n=3N-k$ β.ε στον 2-διάστατο χώρο (2 μεταφορικούς και 1 περιστροφικό β.ε.).

Η επιλογή του συστήματος των γενικευμένων συντεταγμένων, q_i, που είναι εξ' ορισμού ανεξάρτητες, είναι αυθαίρετη. Όμως, στα περισσότερα προβλήματα, η κατάλληλη επιλογή μπορεί να απλοποιήσει τις πράξεις, βοηθώντας στην επίλυση του προβλήματος. Συνήθως, η επιλογή καθοδηγείται από τη γεωμετρία (τις συμμετρίες) του προβλήματος, που επίσης οδηγεί σε απλούστερη έκφραση των εξισώσεων των δεσμών. Έτσι, π.χ. η μελέτη της κίνησης του μαθηματικού εκκρεμούς απλουστεύεται αν επιλέξουμε πολικές συντεταγμένες (αντί καρτεσιανές), αφού η πολική απόσταση r είναι σταθερή και ίση με το μήκος του μη-εκτατού νήματος, οπότε απομένει να βρεθεί μόνο η μεταβολή της πολικής γωνίας, φ. Η εξίσωση του δεσμού παίρνει την απλή μορφή $r=l$, ενώ σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι, $x^2+y^2=l^2$.

Η λύση κάθε προβλήματος ξεκινά με την εύρεση των β.ε. και την επιλογή των q_j. Στη συνέχεια, γράφουμε τις σχέσεις που εκφράζουν το μετασχηματισμό που συνδέει τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο <u>αδρανειακό σύστημα αναφοράς</u> με τις q_j:

$$\boldsymbol{r_i}=\boldsymbol{r_i}(q_j,t) \tag{1}$$

Αν οι δεσμοί είναι σκληρόνομοι, τότε ο χρόνος δεν εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση, εκτός κι αν επιλέξουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Οι συνιστώσες της ταχύτητας προκύπτουν από την παραγώγιση της παραπάνω σχέσης ως προς t. Η κινητική ενέργεια T του συστήματος υπολογίζεται **πάντοτε** στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Για σύστημα υλικών σημείων,

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}^{\,2}=T(q_j,\dot{q}_j,t) \tag{2}$$

ενώ για ένα σύστημα στερεών σωμάτων

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i,o}}^{\boldsymbol{2}}+\sum \vec{v}_{i,O}\cdot(\vec{\omega}_i\times m_i\vec{r}_{i,K})+\frac{1}{2}\sum I_i\,\omega_i^2 \tag{3}$$

όπου v_{i0} η ταχύτητα του σημείου αναφοράς του i στερεού με μάζα m_i, $\boldsymbol{\omega}_i$ το διάνυσμα της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας, I_i η ροπή αδρανείας ως προς άξονα (παράλληλο προς τον δεδομένο άξονα περιστροφής) που περνάει από το σημείο αναφοράς O_i και $\boldsymbol{r}_{iK}$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας K_i ως προς O_i. Πολλές φορές η ροπή αδρανείας δίνεται ως προς άξονα που διέρχεται από διαφορετικό σημείο από αυτό που έχουμε επιλέξει ως σημείο αναφοράς (π.χ. το άκρο μιας ράβδου αντί του κέντρου μάζας της). Τότε, η σωστή τιμή της ροπής αδρανείας βρίσκεται με τη χρήση του θεωρήματος των παραλλήλων αξόνων (θεώρημα Steiner)

$$I_0=I_K+m\,\delta^2$$

όπου I_O η ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το τυχαίο σημείο O του στερεού, I_K η ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας K και είναι παράλληλος προς τον πρώτο (άρα η γωνιακή ταχύτητα είναι ίδια) και δ η απόσταση των δύο αξόνων (όχι των σημείων). Παρατηρήστε ότι η ροπή αδρανείας είναι ελάχιστη όταν η περιστροφή γίνεται γύρω από το κέντρο μάζας του στερεού.

Στην περίπτωση σκληρόνομων δεσμών, η κινητική ενέργεια είναι πάντοτε ομογενής συνάρτηση 2ου βαθμού των γενικευμένων ταχυτήτων, $\dot{q}_j$. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος γράφεται επίσης ως συνάρτηση των q_j, $V=V(q_j,t)$ – στα παραδείγματα που ακολουθούν δε θα αναφερθούμε σε δυναμικά εξαρτώμενα από την ταχύτητα. Για κάθε μηχανικό σύστημα που υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς και υφίσταται την επίδραση συνητρητικών δυνάμεων, μπορούμε να ορίσουμε τη ***συνάρτηση Lagrange*** :

$$L(q_j,\dot{q}_j,t)=T-V(q_j,t) \tag{4}$$

η οποία υπόκειται στην ***αρχή του Hamilton***, σύμφωνα με την οποία *η τροχιά που θα ακολουθήσει το σύστημα για να μεταβεί από το σημείο $A(q_1,t_1)$ στο σημείο $B(q_2,t_2)$ είναι εκείνη για την οποία η δ-μεταβολή του ολοκληρώματος της δράσης είναι μηδέν,*

$$\delta J=\delta \oint L(q_j,\dot{q}_j,t)\,dt=0 \tag{5}$$

δηλαδή η τιμή της δράσης (και όχι της ενέργειας) παίρνει στατική (συνήθως, ελάχιστη) τιμή. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Euler, οι λύσεις του συστήματος (τροχιές) προκύπτουν από την επίλυση των ***εξισώσεων Lagrange***:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad (j=1,\ldots,n) \tag{6}$$

Οι ποσότητες

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{7}$$

ονομάζονται ***γενικευμένες ορμές***. Από τις παραπάνω σχέσεις είναι φανερό ότι, αν κάποια από τις συντεταγμένες είναι ***αγνοήσιμη*** (δεν εμφανίζεται στην έκφραση της L), δηλαδή

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \tag{8}$$

τότε

$$\frac{d}{dt}p_k-0=0\rightarrow p_k=\sigma\tau\alpha\theta \tag{9}$$

δηλαδή η αντίστοιχη ορμή είναι ***ολοκλήρωμα (σταθερά) της κίνησης***. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange μπορούμε να δείξουμε ότι, αν ο χρόνος δεν εμφανίζεται στη συνάρτηση Lagrange, τότε υπάρχει ένα ολοκλήρωμα της κίνησης με διαστάσεις ενέργειας, που ονομάζεται ***ολοκλήρωμα του Jacobi*** :

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \quad \rightarrow \quad J=\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-L=\sigma\tau\alpha\theta \tag{10}$$

Αν οι δεσμοί είναι σκληρόνομοι και ο χρόνος δεν εμφανίζεται στο μετασχηματισμό των συντεταγμένων (δηλ. $\boldsymbol{r_i}=\boldsymbol{r_i}(q_j)$), τότε το ολοκλήρωμα του Jacobi ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, δηλ. *J=E=T+V*.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την αρχή του Hamilton, δύο συναρτήσεις Lagrange, $L(q_j,\dot{q}_j,t)$ και $L'(q_j,\dot{q}_j)$, που συνδέονται μεταξύ τους με κάποια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$L=L'+f(t) \qquad ή \qquad L=L'+\frac{d}{dt}g(q_j,t) \tag{11}$$

είναι ισοδύναμες (δηλ., δίνουν τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις Lagrange). Επομένως, αν στη συνάρτηση Lagrange δεν εμφανίζεται ο χρόνος, συμπεραίνουμε αμέσως ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi. Το αντίθετο όμως **δεν ισχύει πάντα**. Θα πρέπει να ελέγξουμε αν η *L* μπορεί να πάρει μια από τις παραπάνω μορφές. Σε αυτή την περίπτωση, το ολοκλήρωμα του Jacobi υπάρχει και μπορεί να υπολογιστεί, με βάση την *L'* (αντί της *L*).

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των γενικευμένων ορμών και τον μετασχηματισμό του Legendre, ορίζουμε τη ***συνάρτηση του Hamilton***:

$$H=\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j\right)-L=H(q_j,p_j,t) \tag{12}$$

από την οποία προκύπτει το σύστημα των ***κανονικών εξισώσεων του Hamilton***:

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad , \qquad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{13}$$

που είναι ***πλήρως ισοδύναμο*** με το σύστημα των εξισώσεων του Lagrange. Προσέξτε ότι, εφόσον η *H* είναι συνάρτηση των γενικευμένων *συντεταγμένων και τον ορμών*, το <u>πρώτο βήμα</u> για να βρούμε την έκφρασης της *H* είναι να λύσουμε τις Εξ. (7) ως προς τα q_j και να αντικαταστήσουμε στην Εξ. (12). Παρατηρήστε ότι, αν υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi, τότε η αριθμητική τιμή του είναι ίση με την τιμή της *H*. Πρόκειται όμως για δύο διαφορετικές συναρτήσεις, αφου η *H* είναι συνάρτηση των ***γενικευμένων συντεταγμένων και των ορμών*** (<u>όχι</u> των ταχυτήτων). Οι (q_j,p_j) ονομάζονται (κανονικές) **συζηγείς μεταβλητές**.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η εύρεση της γενικής λύσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων της κίνησης (Lagrange ή Hamilton) αποδεικνύεται πολύ δύσκολη (αν όχι αδύνατη) στην πράξη. Έτσι, προκειμένου να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για την εξέλιξη του συστήματος, ακόμη και χωρίς να έχουμε τη λύση, πολλές φορές καταφεύγουμε στην ***ποιοτική μελέτη*** της κίνησης. Αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση των ολοκληρωμάτων της κίνησης, την εύρεση των ***σημείων ισορροπίας*** του συστήματος και το χαρακτηρισμό της ***ευστάθειάς*** τους. Οι λύσεις ισορροπίας $q_{j,0}$ προκύπτουν από τις εξισώσεις του Lagrange (ή του Hamilton), ως τα σημεία εκεινα όπου τόσο οι ταχύτητες όσο και οι επιταχύνσεις είναι ταυτόχρονα μηδέν (ώστε το σύστημα να μην μετακινηθεί), δηλαδή:

$$\dot{q}_j=\ddot{q}_j=0 \tag{14}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης και λύνοντάς τις ως προς q_j, βρίσκουμε τα σημεία ισορροπίας, που αντιστοιχούν επίσης στις λύσεις του συστήματος

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}=0=\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{15}$$

Παρατηρήστε ότι, αν ο χρόνος δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων, οι δεσμοί είναι σκληρόνομοι και $V=V(q_j)$, τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν στα ακρότατα του δυναμικού των δεδομένων δυνάμεων

$$-\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{\partial H}{\partial q_j}=0=\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{16}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι, για 1 β.ε., τα τοπικά *ελάχιστα* του δυναμικού αντιστοιχούν σε *ευσταθή* σημεία ισορροπίας, ενώ τα τοπικά *μέγιστα* σε *ασταθή*. Το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου του δυναμικού – για $q_j=q_{j0}$ – δίνει το χαρακτήρα ευστάθειας. Για 2 β.ε., τα ασταθή σημεία ισορροπίας συμπίπτουν με τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $V(q_1,q_2)$. Για n>3, ο χαρακτηρισμός των σημείων ισορροπίας περιπλέκεται.

Προσοχή: Η αντιστοιχία των σημείων ισορροπίας του συστήματος με τα ακρότατα του δυναμικού των δεδομένων δυνάμεων ***δεν υφίσταται*** στην περίπτωση (ι) που μελετάμε την κίνηση σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ή (ιι) που έχουμε ρεόνομους δεσμούς ή εν γένει εξάρτηση της μορφής $\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_j,t)$. Επιπλέον, ακόμη κι αν η παραπάνω σχέση ισχύει, ο χαρακτηρισμός των σημείων ισορροπίας μέσω των παραγώγων της $V=V(q_j)$ δεν είναι εύκολη υπόθεση, για $n>2$. Έτσι, η *μόνη* μέθοδος εύρεσης των σημείων ισορροπίας που δίνει *πάντοτε* το σωστό αποτέλεσμα είναι ο μηδενισμός των γενικευμένων ταχυτήτων και επιταχύνσεων στις εξισώσεις κίνησης.

Σε αντιστοιχία με τα παραπάνω, η κατάλληλη μέθοδος εύρεσης του ***χαρακτήρα ευστάθειας*** των σημείων ισορροπίας είναι η χρήση της *θεωρίας διαταραχών,* με στόχο τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης στη γειτονιά των σημείων ισορροπίας. Θεωρούμε λοιπόν τις μετατοπίσεις ξ_j των q_j από τη θέση ισορροπίας q_{j0}, δηλαδή

$$\xi_j=q_j-q_{j,0} \quad \rightarrow \quad \dot{\xi}_j=\dot{q}_j \quad \rightarrow \quad \ddot{\xi}_j=\ddot{q}_j \tag{17}$$

Με αντικατάσταση, η συνάρτηση Lagrange μετασχηματίζεται σε συνάρτηση των $(\xi_j,\dot{\xi}_j)$ και τα αριστερά μέλη των εξισώσεων Lagrange γίνονται συναρτήσεις των $(\xi_j,\dot{\xi}_j,\ddot{\xi}_j)$. Θεωρούμε τώρα ότι οι μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας είναι ***αρκετά μικρές*** ώστε οι εξισώσεις κίνησης να μπορεί να θεωρηθούν ***κατά προσέγγιση γραμμικές***. Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης επιτυγχάνεται αναπτύσσοντας όλες τις συναρτήσεις των $(\xi_j,\dot{\xi}_j)$ που εμφανίζονται στις (νέες) εξισώσεις κίνησης σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor, κρατώντας όρους μόνο μέχρι 1ου βαθμού ως προς τα $(\xi_j,\dot{\xi}_j,\ddot{\xi}_j)$ και διαγράφοντας τους όρους ανώτερου βαθμού (π.χ. $\xi_1\dot{\xi}_2\approx 0$) και τους σταθερούς όρους. Έτσι, για 1 β.ε., η νέα εξίσωση κίνησης θα είναι της μορφής

$$\ddot{\xi}+A_0\,\xi=0 \tag{18}$$

όπου A_0 η σταθερά που προκύπτει υπολογίζοντας τους όρους του αναπτύγματος στη θέση ισορροπίας q_{j0}. Σύμφωνα με τη θεωρία λύσης των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η γενική λύση της παραπάνω ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής

$$\xi(t)=D\cos(\Omega t-\varphi) \qquad \alpha\nu \quad A_0>0 \tag{19}$$

ή

$$\xi(t)=C_1e^{\lambda t}+C_2e^{-\lambda t} \qquad \alpha\nu \quad A_0<0 \tag{20}$$

Στην πρώτη περίπτωση η λύση αναπαριστά ευσταθή, απλή αρμονική ταλάντωση. Έτσι, συμπεραίνουμε η θέση ισορροπίας είναι γραμμικά ευσταθής. Στην αντίθετη περίπτωση (A_0<0) η λύση παριστάνει εκθετική απομάκρυνση $(t \to +\infty)$ κι επομένως η λύση ισορροπίας είναι ασταθής. Στην ευσταθή περίπτωση, η ***συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων*** είναι

$$\Omega = \sqrt{A_0} \tag{21}$$

Για n>2 β.ε., οι συχνότητες των μικρών ταλαντώσεων, Ω_j, βρίσκονται με τη χρήση της αντίστοιχης θεωρίας, η οποία ισχύει για συστήματα που υπόκεινται σε *σκληρόνομους* δεσμούς (ή δεν υπόκεινται σε δεσμούς και $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_j)$), βλ. Παραδείγματα).

Παρατήρηση: Σε συστήματα 2 β.ε., μπορεί να μην υπάρχουν σημεία ισορροπίας, αλλά να υπάρχουν ειδικές λύσεις (πχ. κυκλικές περιοδικές τροχιές), που αντιστοιχούν στα σημεία ισορροπίας ενός ισοδύναμου μονοδιάστατου προβλήματος. Επομένως, η εύρεσή τους και ο χαρακτηρισμός της ευστάθειάς τους γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως και παραπάνω.