ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2017
Λύσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ 1.

α) Αποδείξτε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, $W_{AB} = T_B - T_A$.

β) Δείξτε ότι, αν η κίνηση ενός υλικού σημείου γίνεται με την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης που προέρχεται από το δυναμικό $V = V(x, y, z)$, τότε υπάρχει το ολοκλήρωμα της ενέργειας.

γ) Αποδείξτε ότι η κεντρικές δυνάμεις, $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, είναι συντηρητικές.

Λύση

α) Βιβλίο Χατζηδημητρίου, παράγραφος 2.6.

β) Βιβλίο Χατζηδημητρίου, παράγραφος 2.7, 2.8.

γ) Είναι $\vec{F}(r) = F(r)\vec{e}_r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{e}_r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}$ άρα

$$\vec{F} = F(r)\frac{x}{r}\vec{i} + F(r)\frac{y}{r}\vec{i} + F(r)\frac{z}{r}\vec{k} = f(r)x\vec{i} + f(r)y\vec{j} + F(r)z\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial f(r)z}{\partial y} - \frac{\partial f(r)y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial f(r)y}{\partial x} - \frac{\partial f(r)x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial f(r)y}{\partial x} - \frac{\partial f(r)x}{\partial y}\right)$$

Είναι $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}2x, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}2y, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r}2z$, οπότε η παραπάνω παράσταση δίνει $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

ΘΕΜΑ 2.

Υλικό σημείο μάζας *m* κινείται στον άξονα x’Ox, υπό την επίδραση του δυναμικού $V = x^4 - ax^2, \quad a > 0$.

α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους

β) Βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας.

γ) Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα.

Λύση

α) Τα σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα του δυναμικού

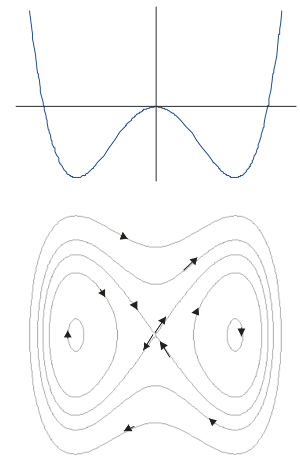
$$\frac{dV}{dx} = 4x^3 - 2ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$$

Για την ευστάθεια ελέγχουμε τον τύπο του ακρότατου δηλαδή το πρόσημο του $\left.\frac{d^2V}{dx}\right|_{x=x0} = -2a + 12x^2$

Για το *x*=0, $\left.\dfrac{d^2V}{dx}\right|_{x=0} = -2a < 0$ μέγιστο άρα ασταθές

Για το $x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{2}}$, $\left.\dfrac{d^2V}{dx}\right|_{x=0} = 4a > 0$ ελάχιστο άρα ευσταθές.

(γ)

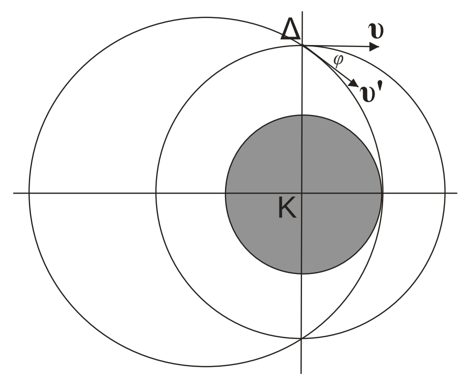


β) Σύμφωνα με τη θεωρία διαταραχών οι ταλαντώσεις γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας περιγράφονται από τον αρμονικό ταλαντωτή

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{, όπου } k = \left.\frac{d^2V}{dx}\right|_{x=\sqrt{\frac{a}{2}}} = 4a$$

Άρα $\omega = 2\sqrt{a/m} \quad \Rightarrow \quad T = \pi\sqrt{m/a}$

ΘΕΜΑ 3.



α) Αποδείξτε ότι μια κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων, $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, είναι ευσταθής αν $\dfrac{F'(r_0)}{F(r_0)} + \dfrac{3}{r_0} > 0$.

β) Δορυφόρος γυρίζει σε κυκλική τροχιά με ακτίνα $a = 2R$, όπου *R* η ακτίνα της Γης. Ξαφνικά η διεύθυνση της κίνησης αλλάζει και στρέφεται προς τη Γη κατά γωνία *φ* χωρίς να αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας. β1) υπολογίστε την ταχύτητα και την ενέργεια της κυκλικής τροχιάς β2) υπολογίστε τη γωνία *φ* για την οποία ο δορυφόρος κινείται έτσι ώστε μόλις να αγγίξει τη Γη. (μάζα δορυφόρου *m*, μάζα Γης *M*)

Λύση

α) Βιβλίο Χατζηδημητρίου, παράγραφος 6.5 (1ο μέρος)

β1) $$\upsilon^2 = -\frac{F(r)r}{m} = -\frac{-\frac{GMm}{r^2}r}{m} \overset{r=a}{\Rightarrow} \upsilon = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$$

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + V(a) = \frac{1}{2}m\frac{GM}{a} - \frac{GMm}{a} = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{4R}$$

β2) Μετά την αλλαγή διεύθυνσης η ενέργεια, *E*, δεν αλλάζει αφού είμαστε στο ίδιο σημείο και το μέτρο της ταχύτητας είναι αμετάβλητο. Η στροφορμή αμέσως μετά την αλλαγή της κατεύθυνσης θα είναι $L = m|\vec{r}\times\vec{\upsilon}'| = mr\upsilon\sin\theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ της ΚΔ και της ***υ'***, Δηλαδή

$$L = mr\upsilon\cos\varphi = m2R\sqrt{\frac{GM}{2R}}\cos\varphi$$

Στο σημείο που αγγίζει ο Δορυφόρος τη Γη, ο δορυφόρος θα είμαστε σε αψίδα (η κοντινότερη απόσταση στι κέντρο των δυνάμεων, περίκεντρο) και με ταχύτητα $\upsilon_Γ$. Στο σημείο αυτό η ενέργεια και η στροφορμή θα είναι

$$E_\Gamma = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 - \frac{GMm}{R}, \qquad L_\Gamma = mR\upsilon_\Gamma$$

Είναι $E = E_\Gamma \quad \Rightarrow \quad -\frac{GMm}{4R} = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 - \frac{GMm}{R} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma = \sqrt{\frac{6GM}{4R}}$

Επίσης $\quad L = L_\Gamma \Rightarrow \quad m2R\sqrt{\frac{GM}{2R}}\cos\varphi = mR\sqrt{\frac{6GM}{4R}} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ` και άρα $\boxed{\varphi = 30^o}$

ΘΕΜΑ 4.

Τρένο μάζας 100 τόνων κινείται προς τα ανατολικά στο βόρειο ημισφαίριο σε τόπο πλάτους 45^o και με σταθερή ταχύτητα 144Km/h.

α) να βρεθεί τιμή της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας της κοριολείου δύναμης

β) Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινηθεί το τρένο για να χάσει την επαφή του με τις ράγες?

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων με *Ox* άξονα από Β προς Ν, *Oy* άξονα από Δ προς Α και *Oz* άξονα κατακόρυφο στην επιφάνεια της Γης στο συγκεκριμένο τόπο.

α) σχετική ταχύτητα τρένου $\vec{\upsilon}_\sigma = \upsilon_0 \vec{j}$,

γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης $\vec{\omega} = \omega_0(-\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$

$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_\sigma = 2m\upsilon_0\omega_0\sin\theta\vec{i} + 2m\upsilon_0\omega_0\cos\theta\vec{k}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές, $m=10^5$Kgr, υ_0=40m/s, $\omega_0=\pi/43200$ rad/s, $\theta=\pi/4$, βρίσκουμε

$F_{οριζ} \approx 411\text{N}$ (προς το Νότο), $F_{κατακ} \approx 411\text{N}$ (προς τα επάνω)

β) Η κατακόρυφη συνιστώσα της κοριολείου δύναμης τείνει να σηκώσει το τρένο προς τα πάνω. Το τρένο θα σηκωθεί από τις ράγες αν

$F_{κατακ} \geq mg \quad \Rightarrow \quad 2m\upsilon\omega_0\cos\theta \geq mg \quad \Rightarrow \quad \upsilon \geq \frac{g}{2\omega_0\cos\theta}$ ή $\upsilon \geq 97.235$ m/s ή 350 000 Km/h

ΘΕΜΑ 5.

α) Δείξτε ότι οι εξισώσεις Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ παίρνουν την γνωστή μορφή (που δίνεται με την συνάρτηση του Lagrange, *L*) εάν οι δεδομένες δυνάμεις προέρχονται από δυναμικό $V = V(x_1, y_1, z_1, x_2, ..., z_N)$

β) Υλικό σημείο μάζας *m* μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε κύλινδρο ακτίνας *R* και υπό την επίδραση της κεντρικής δύναμης $F = -kr$, $k>0$ (προσοχή : χωρίς βαρύτητα)

β1) Να βρεθεί η συνάρτηση Lagrange

β2) Τα ολοκληρώματα της κίνησης

β3) Την συνθήκη ώστε η κίνηση του Σ να είναι περιοδική, όπως προκύπτει από την ανάλυση των εξισώσεων κίνησης.

β4) Την συνάρτηση Hamilton

Λύση

α) Βιβλίο Χατζηδημητρίου, παράγραφος 2.5 (2ο μέρος).

β1) Θεωρούμε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ,φ,z). Έχουμε ένα σκληρόνομο δεσμό $\rho=R$=σταθ. και $x = R\cos\varphi,\quad y = R\sin\varphi,\quad z = z$.

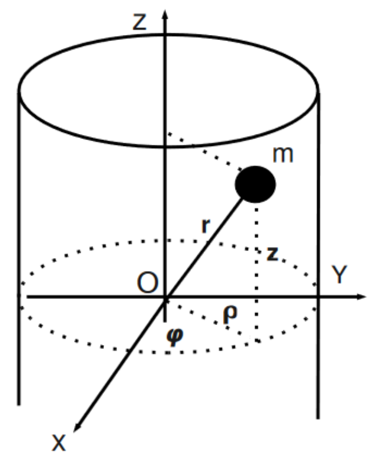
Έχουμε

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

και

$$V = -\int F(r)dr = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) = \frac{1}{2}kz^2 + \sigma\tau\alpha\theta(=0)$$

$$L = T - V$$



β2) Η L δεν περιέχει τον χρόνο άρα υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi. Επειδή ο δεσμός είναι σκληρόνομος, το ολοκλήρωμα Jacobi συμπίπτει με το ολοκλήρωμα ενέργειας $E = T + V$

Επίσης η γενικευμένη συντεταγμένη φ είναι αγνοήσιμη, οπότε η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή είναι σταθερή

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} = C$$

β3) Οι εξισώσεις Lagrange μας δίνουν $mR^2\ddot{\varphi} = 0 \quad (1) \qquad m\ddot{z} + kz = 0 \quad (2)$.

Η (1) αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $mR^2\dot{\varphi} = C$, και δείχνει περιστροφές γύρω από τον κύλινδρο με γωνιακή συχνότητα $\omega = \dot{\varphi} = \frac{C}{mR^2}$ ή με περίοδο $T_\varphi = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mR^2}{C}$. Η εξίσωση (2) δείχνει αρμονικές ταλαντώσεις κατά την διεύθυνση z με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή με περίοδο $T_z = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Ο λόγος των περιόδων είναι $\lambda = \frac{T_\varphi}{T_z} = \frac{R^2}{C}\sqrt{km}$. Για να είναι η τροχιά περιοδική θα πρέπει ο λόγος λ να είναι ρητός αριθμός.

β4) Είναι $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}$ και επίσης προκύπτει $\dot{z} = p_z$. Η συνάρτηση Hamilton $H=H(\varphi,z,p_\varphi,p_z)$ θα είναι

$$H = p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\varphi^2}{mR^2} + p_z^2\right) + \frac{1}{2}kz^2$$